



Model *Predator-Prey* dengan Dua *Predator* dan Satu *Prey* Terinfeksi

Irham Taufiq^{1a)}, Denik Agustito^{2b)}

^{1),2)}Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa Yogyakarta, Jalan Batikan UH III/1043 Yogyakarta,
(0274) 375637

e-mail: ^{a)} irham.taufiq@ustjogja.ac.id, ^{b)} denikagustito@yahoo.co.id

Abstrak

Di dalam penelitian ini, telah dibahas model matematika yang menunjukkan interaksi antara satu *prey* rentan dan *prey* terinfeksi dengan dua *predator*. Interaksi antara *predator* dan *prey* menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Pertumbuhan *predator* dan *prey* menggunakan fungsi logistik. Dari model tersebut diperoleh delapan titik ekuilibrium. Kestabilan lokal masing-masing titik ekuilibrium dianalisis dengan metode linierisasi. Kemudian simulasi numerik menunjukkan interaksi antara dua *predator*, *prey* rentan dan *prey* terinfeksi.

Kata Kunci: model *predator-prey*, *prey* terinfeksi, simulasi numerik, titik ekuilibrium

Predator-Prey Model with Two Predators and An Infected Prey

Abstract

In this research, a mathematical model that shows interaction between a susceptible prey and an infected prey with two population predators is discussed. Interaction between predator and prey follows functional response Holling type II. Population growth of both of them is modeled using logistic function. There are eight equilibrium points for this model. Local stability of each equilibrium point is analysed by linearization method. Then, numerical simulation shows interaction between two predators, a susceptible prey and an infected prey.

Keywords: *predator-prey model, infected prey, numerical simulation, equilibrium point*

PENDAHULUAN

Suatu ekosistem terdiri dari semua organisme yang hidup dalam suatu komunitas dan juga semua faktor-faktor abiotik yang berinteraksi dengan organisme tersebut. Selain berinteraksi dengan faktor-faktor abiotik, sekumpulan makhluk hidup sejenis atau populasi juga akan berinteraksi dengan individu pada populasi lainnya. Salah satu interaksi antar populasi dalam ekosistem adalah predasi, yaitu hubungan *prey* dan *predator*. Hubungan ini sangat erat kaitannya karena tanpa *prey*, *predator* tidak dapat bertahan hidup karena tidak ada sumber makanan.

Hubungan antara *predator* dan *prey* dapat dimodelkan secara matematis menjadi model *predator-prey*. Menurut Edwards &

Penney (2008), model *predator-prey* yang paling sederhana adalah model Lotka-Volterra dengan asumsi pertumbuhan *prey* mengikuti pertumbuhan Malthus. Akan tetapi, model tersebut memiliki kelemahan karena pada model pertumbuhan Malthus, populasi tumbuh tidak terbatas seiring dengan pertambahan waktu. Pada kenyataannya, suatu populasi tidak dapat bertambah secara terus menerus karena adanya faktor-faktor yang menghambat pertumbuhan populasi seperti ruang hidup, makanan, maupun lingkungan. Oleh karena itu, model Lotka-Volterra kemudian dimodifikasi dengan mengasumsikan pertumbuhan *prey* mengikuti pertumbuhan logistik.

Model Lotka-Volterra hanya melibatkan satu *predator* dan satu *prey* saja padahal pada

beberapa ekosistem terdapat predasi yang melibatkan dua *predator* dan *prey* yang rentan maupun terinfeksi. Contoh predasi tersebut adalah wereng batang padi coklat (*Nilaparvata lugens* Stål.) yang diprey oleh musuh alaminya, seperti kumbang (*Menochilus sexmaculatus*) dan kepik mirid (*Cyrtorhinus lividipennis*). Model Lotka-Volterra dapat dikembangkan untuk memodelkan interaksi antara dua *predator* dan satu *prey*. Alebraheem, J & Abu-Hasan, Y (2012) telah menurunkan model dua *predator* dan satu *prey* dengan asumsi pertumbuhan *prey* dan *predator* mengikuti pertumbuhan logistik di mana terjadi kompetisi antara kedua *predator* tersebut. Di lain pihak, Kar *et al.* (2012) juga telah menurunkan model *predator-prey* dengan *prey* terinfeksi. Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis tertarik untuk mengkaji model *predator-prey* dengan dua *predator* dan satu *prey* terinfeksi.

METODE

Penyusunan model *predator-prey* dalam penelitian ini merujuk pada satu makalah yang ditulis oleh Alebraheem, J & Abu-Hasan, Y., (2012) dan Kar *et al.* (2012). Pada makalah ini, populasi *prey* dibagi menjadi dua kelas yaitu kelas *prey* rentan dan kelas *prey* terinfeksi.

Informasi yang diperlukan berupa fakta-fakta terkait dinamika *predator* dan *prey*. Asumsi-asumsi model digunakan dan disusun untuk memberikan informasi tambahan yang tidak diperoleh dari fakta-fakta di lapangan guna untuk membantu memudahkan analisis suatu sistem.

Bentuk persamaan matematika dari model tersebut dirumuskan dengan memperhatikan diagram transfer yang menggambarkan dinamika *predator* dan *prey* pada ekosistem tanaman padi. Model matematika yang dihasilkan berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier. Analisis yang dilakukan terhadap sistem adalah penentuan eksistensi titik ekuilibrium, kriteria kestabilan titik ekuilibrium, dan simulasi numerik. Simulasi ini dilakukan dengan bantuan

program *MAPLE*. Hasil simulasi berupa potret fase yang menggambarkan dinamika *predator-prey*.

Berikut ini adalah langkah-langkah dalam penelitian yaitu menentukan fakta dan asumsi model, menentukan parameter model, menyusun model matematika dua *predator* dan *prey* terinfeksi berupa sistem persamaan diferensial nonlinier, menentukan titik ekuilibrium dari model tersebut, menganalisa kestabilan model tersebut di sekitar titik ekuilibrium dengan metode linierisasi, menentukan nilai eigen dari matriks *Jacobian* hasil linierisasi, menentukan jenis kestabilan titik ekuilibrium tersebut dan melakukan simulasi numerik dengan menggunakan program *MAPLE 17*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut akan dibahas mengenai pembentukan model *predator-prey* dengan dua *predator* dan satu *prey* terinfeksi. Jumlah individu pada populasi *prey* rentan pada waktu t dinotasikan dengan $x(t)$, jumlah individu pada populasi *prey* terinfeksi pada waktu t dinotasikan dengan $i(t)$, jumlah individu pada populasi *predator* pertama pada waktu t dinotasikan dengan $y(t)$, jumlah individu pada populasi *predator* kedua pada waktu t dinotasikan dengan $z(t)$.

Kemudian diasumsikan bahwa populasi *predator* dan populasi *prey* bersifat tertutup, artinya tidak ada *predator* dan *prey* yang melakukan migrasi. Model *predator-prey* yang dikaji terdiri dari dua *predator* dan satu *prey* rentan dan terinfeksi. Terjadi interaksi antara *prey* dan *predator*. Antara *predator* yang satu dengan yang lainnya saling berkompetisi artinya terjadi persaingan antara kedua *predator* untuk mendapatkan *prey* tersebut. Pertumbuhan *prey* dan *predator* mengikuti pertumbuhan logistik.

Selanjutnya, diasumsikan bahwa apabila tidak ada interaksi antara *predator* dan *prey* rentan, maka pertumbuhan *prey* rentan mengikuti model logistik, yaitu dengan adanya keterbatasan daya dukung lingkungan sebesar k dan tingkat pertumbuhan intrinsik r akibatnya *prey* rentan akan bertambah dengan laju

$rx(1 - x/k)$. *Predator-prey* pada kelas *prey* rentan menggunakan respon Holling tipe II yaitu $g(x) = \alpha x / (1 + h\alpha x)$.

Ketika terdapat interaksi antara *predator* pertama dan *prey* rentan sebesar $g_1(x)$, pertumbuhan *prey* rentan akan berkurang sebesar $g_1(x)y$ yang merupakan laju perkalian antara fungsi respon Holling tipe II dengan populasi *predator*, yaitu $g_1(x) = \alpha x / (1 + h_1\alpha x)$ dengan α adalah tingkat pencarian dan penangkapan *prey* rentan oleh *predator* pertama dan h_1 adalah tingkat penanganan dan pencernaan *predator* pertama, akibatnya $g_1(x)y = \alpha xy / (1 + h_1\alpha x)$.

Ketika terdapat interaksi antara *predator* kedua dan *prey* rentan sebesar $g_2(x)$, pertumbuhan *prey* rentan akan berkurang sebesar $g_2(x)z$ yang merupakan laju perkalian antara fungsi respon Holling tipe II dengan *predator* z , yaitu $g_2(x) = \beta x / (1 + h_2\beta x)$ dengan β adalah tingkat pencarian dan penangkapan *prey* rentan oleh *predator* kedua dan h_2 adalah tingkat penanganan dan pencernaan *predator* kedua, akibatnya $g_2(x)z = \beta xz / (1 + h_2\beta x)$.

Kemudian perpindahan populasi dari x ke i mengurangi laju pertumbuhan x . Hal ini dipengaruhi oleh laju interaksi antara *prey* yang rentan dan terinfeksi dengan peluang transmisi *prey* terinfeksi ke *prey* yang rentan μ , dan kepadatan populasi x dengan hama terinteraksi menghasilkan persamaan μxi . Adanya kematian alami pada populasi *prey* rentan dengan laju m mengakibatkan populasi *prey* rentan akan berkurang sebesar mx . Dengan demikian, laju perubahan jumlah *prey* rentan terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{\alpha xy}{1 + h_1\alpha x} - \frac{\beta xz}{1 + h_2\beta x} - \mu xi - mx \quad (1)$$

Kemudian, perpindahan populasi dari x ke i menambah laju pertumbuhan i . Hal ini dipengaruhi oleh laju interaksi antara hama yang rentan dan terinfeksi dengan peluang transmisi

hama terinfeksi ke hama yang rentan μ dan kepadatan populasi x dengan hama terinteraksi menghasilkan persamaan μxi . Ketika terdapat interaksi antara *predator* pertama dan *prey* terinfeksi dengan tingkat θ maka pertumbuhan *prey* terinfeksi akan berkurang sebesar θyi . Ketika terdapat interaksi antara *predator* kedua dan *prey* sebesar γ maka pertumbuhan *prey* terinfeksi akan berkurang sebesar γzi . Adanya kematian alami pada populasi *prey* dengan laju q mengakibatkan populasi *prey* akan berkurang sebesar qi . Dengan demikian, laju perubahan jumlah *prey* terinfeksi terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{di}{dt} = \mu xi - \theta yi - \gamma zi - qi \quad (2)$$

Kemudian, apabila tidak ada *prey* maka terjadi penurunan populasi *predator* pertama dengan tingkat kematian alami sebesar u , tetapi apabila terdapat *prey* yang rentan maka terjadi interaksi antara *prey* rentan dan *predator* pertama, pertumbuhan *predator* mengikuti model logistik yaitu dengan adanya keterbatasan daya dukung lingkungan sebesar k_y dengan $k_y = a_1x$ sebanding dengan tidak tersedianya sejumlah *prey* dan tingkat pertumbuhan respon numerik R_1 sehingga *predator* akan bertambah dengan laju $R_1y(1 - y/k_y)$ dengan $R_1 = \alpha xe_1 / (1 + h_1\alpha x)$ dengan e_1 menyatakan pengubahan konsumsi *prey* ke dalam kelahiran *predator* pertama. Apabila terdapat *prey* yang terinfeksi maka terjadi interaksi antara *prey* terinfeksi dan *predator* pertama dengan laju sebesar $\rho_1\theta yi$.

Selain itu, terjadi interaksi antara *predator* yang satu dengan lainnya. Tingkat kompetisi dari *predator* pertama pada *predator* kedua sebesar c_1 . Akibatnya, populasi *predator* pertama akan berkurang sebesar c_1yz . Dengan demikian, laju perubahan jumlah *predator* pertama terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dy}{dt} = R_1 y \left(1 - \frac{y}{k_y} \right) + \rho_1 \theta y i - c_1 y z - u y \quad (3)$$

Selanjutnya, apabila tidak ada *prey* maka terjadi penurunan populasi *predator* kedua dengan tingkat kematian alami sebesar w tetapi apabila terdapat *prey* rentan maka terjadi interaksi antara *prey* dan *predator* kedua, pertumbuhan *predator* mengikuti model logistik yaitu dengan adanya keterbatasan daya dukung lingkungan sebesar k_z dengan $k_z = a_2 x$ sebanding dengan tidak tersedianya sejumlah *prey* dan tingkat pertumbuhan respon numerik R_2 sehingga *predator* akan bertambah dengan laju $R_2 z (1 - z / k_z)$ dengan $R_2 = \beta x e_2 / (1 + h_2 \beta x)$ dan e_2 menyatakan peubahan konsumsi *prey* ke dalam kelahiran *predator* kedua. Namun, apabila terdapat *prey* terinfeksi maka terjadi interaksi antara *prey* terinfeksi dan *predator* kedua dengan laju sebesar $\rho_2 \gamma z i$.

Selain itu, terjadi interaksi antara *predator* yang satu dengan lainnya. Tingkat kompetisi dari *predator* kedua pada *predator* pertama sebesar c_2 . Akibatnya, populasi *predator* kedua akan berkurang sebesar $c_2 y z$. Dengan demikian, laju perubahan jumlah *predator* kedua terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dz}{dt} = R_2 z \left(1 - \frac{z}{k_z} \right) + \rho_2 \theta z i - c_2 y z - w z \quad (4)$$

Berdasarkan (1), (2), (3), dan (4) diperoleh model *predator-prey* dengan dua *predator* dan satu *prey* terinfeksi yang berupa sistem persamaan diferensial nonlinier berikut.

$$\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{\alpha x y}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\beta x z}{1 + h_2 \beta x} - \mu x i - m x$$

$$\frac{di}{dt} = \mu x i - \theta y i - \gamma z i - q i \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = R_1 y \left(1 - \frac{y}{k_y} \right) + \rho_1 \theta y i - c_1 y z - u y$$

$$\frac{dz}{dt} = R_2 z \left(1 - \frac{z}{k_z} \right) + \rho_2 \gamma z i - c_2 y z - w z$$

dengan syarat awal $x(0) = x_0$, $i(0) = i_0$, $y(0) = y_0$, dan $z(0) = z_0$.

Jika $R_1 = \alpha x e_1 / (1 + h_1 \alpha x)$, $R_2 = \beta x e_2 / (1 + h_2 \beta x)$,

$k_y = a_1 x$, dan $k_z = a_2 x$ disubstitusikan ke (5),

maka (5) menjadi

$$\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{\alpha x y}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\beta x z}{1 + h_2 \beta x} - \mu x i - m x$$

$$\frac{di}{dt} = \mu x i - \theta y i - \gamma z i - q i \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha x e_1 y}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\alpha x e_1 y^2}{(1 + h_1 \alpha x) a_1 x} + \rho_1 \theta y i - c_1 y z - u y$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\beta x e_2 z}{1 + h_2 \beta x} - \frac{\beta x e_2 z^2}{(1 + h_2 \beta x) a_2 x} + \rho_2 \gamma z i - c_2 y z - w z$$

Sistem (6) dapat ditulis dalam bentuk tak berdimensi untuk mereduksi banyaknya parameter. Akibatnya, analisis matematikanya tidak rumit. Selanjutnya didefinisikan

$$\bar{t} = r t, \quad \bar{x} = \frac{x}{k}, \quad \bar{i} = \frac{i}{k},$$

$$\bar{\mu} = \frac{k \mu}{r}, \quad \bar{\theta} = \frac{a_1 k \theta}{r},$$

$$\bar{\gamma} = \frac{a_2 k \gamma}{r}, \quad \bar{q} = \frac{q}{r},$$

$$\bar{y} = \frac{y}{a_1 k}, \quad \bar{z} = \frac{z}{a_2 k}, \quad \bar{\alpha} = \frac{k a_1 \alpha}{r},$$

$$\bar{\beta} = \frac{k a_2 \beta}{r}, \quad \bar{e}_1 = \frac{e_1}{a_1}, \quad \bar{e}_2 = \frac{e_2}{a_2},$$

$$\bar{u} = \frac{u}{r}, \quad \bar{w} = \frac{w}{r}, \quad \bar{h}_1 = \frac{r h_1}{a_1},$$

$$\bar{h}_2 = \frac{r h_2}{a_2}, \quad \bar{c}_1 = \frac{a_2 k c_1}{r}, \quad \bar{c}_2 = \frac{a_1 k c_2}{r},$$

$$\bar{\rho}_1 = \rho_1, \quad \bar{\rho}_2 = \rho_2, \quad \bar{m} = \frac{m}{r}. \quad (7)$$

Selanjutnya, persamaan-persamaan pada (7) disubstitusikan ke (6). Kemudian, dengan menghapus bar pada semua parameter dan menyederhanakannya diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{\alpha xy}{1+h_1\alpha x} \\ &\quad - \frac{\beta xz}{1+h_2\beta x} - \mu xi - mx \\ \frac{di}{dt} &= \mu xi - \theta yi - \gamma zi - qi \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{e_1\alpha xy}{1+h_1\alpha x} - \frac{e_1\alpha y^2}{1+h_1\alpha x} \\ &\quad + \rho_1\theta yi - c_1yz - uy \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{e_2\beta xz}{1+h_2\beta x} - \frac{e_2\beta z^2}{1+h_2\beta x} \\ &\quad + \rho_2\gamma zi - c_2yz - wz \end{aligned} \tag{8}$$

dengan $R^4_+ = \{(x, i, y, z) \in R^4 : x \geq 0, i \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

Teorema 1. Solusi dari (8) yang berada di R^4_+ untuk $t \geq 0$ adalah terbatas.

Bukti: Persamaan pertama dari (8) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{\alpha xy}{1+h_1\alpha x} \\ &\quad - \frac{\beta xz}{1+h_2\beta x} - \mu xi - mx \end{aligned} \tag{9}$$

karena $\alpha xy/(1+h_1\alpha x), \beta xz/(1+h_2\beta x), \mu xi, mx \geq 0$,

maka (9) menjadi $\frac{dx}{dt} \leq x(1-x)$.

Selanjutnya, jika $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$, maka memiliki

$$\text{solusi } x = \frac{1}{1+be^{-t}}.$$

Akibatnya, $x \leq 1, \forall t > 0$.

Selain itu, solusi y, z , dan i juga terbatas karena keterbatasannya mengikuti keterbatasan x .

Selanjutnya, akan dicari titik ekuilibrium model tersebut.

Jika $\frac{dx}{dt} = 0$, maka

$$x = 0 \tag{10}$$

atau

$$\begin{aligned} (1-x) - \frac{\alpha y}{1+h_1\alpha x} - \frac{\beta z}{1+h_2\beta x} \\ - \mu i - m = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Jika $\frac{di}{dt} = 0$, maka

$$i = 0 \tag{12}$$

atau

$$\mu x - \theta y - \gamma z - q = 0 \tag{13}$$

Kemudian, jika $\frac{dy}{dt} = 0$, maka

$$y = 0 \tag{14}$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{e_1\alpha x}{1+h_1\alpha x} - \frac{e_1\alpha y}{1+h_1\alpha x} + \rho_1\theta i \\ - c_1z - u = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Kemudian, jika $\frac{dz}{dt} = 0$, maka

$$z = 0 \tag{16}$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{e_2\beta x}{1+h_2\beta x} - \frac{e_2\beta z}{1+h_2\beta x} + \rho_2\gamma i \\ - c_2y - w = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Berdasarkan uraian di atas, dari (10), (12), (14), dan (16) diperoleh titik ekuilibrium yaitu $TE_1 = (0, 0, 0, 0)$. Kemudian dari (11), (12), (14), dan (16) diperoleh titik ekuilibrium $TE_2 = (1-m, 0, 0, 0)$. Selanjutnya, dari (11), (13), (14), dan (16) diperoleh titik ekuilibrium

$$TE_3 = \left(\frac{q}{m}, \left(\frac{1-\frac{q}{m}-m}{\mu} \right), 0, 0 \right)$$

Selanjutnya, dari (11), (12), (15) dan (16) diperoleh titik ekuilibrium $TE_4 = (x_4, 0, y_4, 0)$,

dengan

$$\begin{aligned} -(e_1 + e_1\alpha - h_1e_1\alpha + e_1mh_1\alpha - uh_1\alpha) + \\ x_4 = \frac{\sqrt{(e_1 + e_1\alpha - h_1e_1\alpha + e_1mh_1\alpha - uh_1\alpha)^2 + G}}{2e_1h_1\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{dan } G = 4h_1\alpha e_1(e_1m - e_1 - u)$$

$$y_4 = \frac{(1-x-m)(1+h_1\alpha x)}{\alpha}$$

Selanjutnya, dari (11), (12), (14) dan (17) diperoleh titik ekuilibrium $TE_5 = (x_5, 0, 0, z_5)$

dengan

$$\begin{aligned} -(e_2 + e_2\beta - h_2e_2\beta + e_2mh_2\beta - wh_2\beta) + \\ x_5 = \frac{\sqrt{(e_2 + e_2\beta - h_2e_2\beta + e_2mh_2\beta - wh_2\beta)^2 + H}}{2e_2h_2\beta} \end{aligned}$$

$$\text{dan } H = 4h_2\beta e_2(e_2m - e_2 - w)$$

$$z_5 = \frac{(1-x-m)(1+h_2\beta x)}{\beta}$$

Selanjutnya, dari (11), (13), (15) dan (16) diperoleh titik ekuilibrium $TE_6 = (x_6, i_6, y_6, 0)$

dengan

$$x_6 = \frac{-\left(\rho_1\theta^2 - \mu e_1\alpha + \rho_1\theta + \alpha + \mu e_1\right) + \sqrt{\left(\rho_1\theta^2 - \mu e_1\alpha + \rho_1\theta + \alpha + \mu e_1\right)^2 + K}}{2\rho_1\theta^2 h_1\alpha}$$

dan $K = 4\rho_1\theta^2 h_1\alpha q (e_1\theta + \alpha + \mu e_1\alpha)$

$$y_6 = \frac{x_6 - q}{\theta} \quad \text{dan} \quad i_6 = \frac{1 - x_6 - m - \frac{\alpha y_6}{1 + h_1\alpha x_6}}{\mu}$$

Selanjutnya, dari (11), (13), (14) dan (17) diperoleh titik ekuilibrium $TE_7 = (x_7, i_7, 0, z_7)$

dengan

$$x_7 = \frac{-\left(\rho_2\gamma^2 - \mu e_2\beta + \rho_2\gamma + \beta + \mu e_2\right) + \sqrt{\left(\rho_2\gamma^2 - \mu e_2\beta + \rho_2\gamma + \beta + \mu e_2\right)^2 + K}}{2\rho_2\gamma^2 h_2\beta}$$

dan $K = 4\rho_2\gamma^2 h_2\beta q (e_2\gamma + \beta + \mu e_2\beta)$

$$z_7 = \frac{x_7 - q}{\gamma} \quad \text{dan} \quad i_6 = \frac{1 - x_6 - m - \frac{\beta z_7}{1 + h_2\beta x_7}}{\mu}$$

Selanjutnya, dari (11), (13), (15), dan (17) diperoleh titik ekuilibrium $TE_8 = (x_8, i_8, y_8, z_8)$.

Kestabilan titik-titik ekuilibrium diselidiki dari hasil linierisasi di sekitar titik ekuilibriumnya dan disajikan pada teorema berikut.

Teorema 2. 1. Jika $m > 1$, maka titik $TE_1 = (0, 0, 0, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

2. Jika $e_1\alpha(1-m) < u[1 + h_1\alpha(1-m)]$, $e_2\beta(1-m) < w[1 + h_2\beta(1-m)]$ dan $m < 1$ dipenuhi, maka titik ekuilibrium $TE_2 = (1-m, 0, 0, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

3. Jika $f_{33} < 0$, $f_{44} < 0$ dan $(f_{11} + f_{22}) < 0$, $(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) > 0$, dipenuhi maka titik ekuilibrium

$$TE_3 = \left(\frac{q}{m}, \frac{\left(1 - \frac{q}{m} - m\right)}{\mu}, 0, 0 \right) \quad \text{bersifat stabil}$$

asimtotik lokal.

4. Jika $-(g_{11} + g_{33}) > 0$, $g_{44} < 0$, $g_{22} < 0$ dan $(g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31}) > 0$ dipenuhi maka titik ekuilibrium $TE_4 = (x_4, 0, y_4, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

5. Jika $(h_{11}h_{44} - h_{14}h_{41}) > 0$, $h_{22} < 0$, $h_{33} < 0$ dan $-(h_{11} + h_{44}) > 0$ dipenuhi maka titik ekuilibrium $TE_5 = (x_5, 0, 0, z_5)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

6. Jika $A > 0, B > 0, C > 0, AB - C > 0$, dan $j_{44} < 0$ maka titik ekuilibrium $TE_6 = (x_6, i_6, y_6, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

7. Jika $D > 0, E > 0, F > 0, DE - F > 0$ dan $j_{33} < 0$ maka titik ekuilibrium $TE_7 = (x_7, i_7, 0, z_7)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

8. Jika $J > 0, K > 0, L > 0$ dan $JK - L > 0$ maka titik ekuilibrium $TE_8 = (x_8, i_8, y_8, z_8)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

Simulasi model dilakukan dengan menggunakan *software MAPLE 17*. Simulasi ini bertujuan untuk melengkapi hasil-hasil yang diperoleh secara analisis pada bab sebelumnya. Pada bagian ini dilakukan simulasi titik ekuilibrium untuk mengetahui perilaku dinamik penyelesaian (8) dalam jangka waktu yang lama di sekitar titik ekuilibrium tersebut. Dalam simulasi model *predator-prey* dengan dua *predator* dan satu *prey* ini digunakan wereng batang padi coklat sebagai *prey*, sedangkan kumbang *Menochilus sexmaculatus* sebagai *predator* pertama dan kepik mirid sebagai *predator* kedua. Simulasi model matematika *predator-prey* ini pada (8) menggunakan nilai parameter berdasarkan Alebraheem & Abu-Hasan (2012) dan Kar, *et al.* (2012). Adapun nilai-nilai parameter yang digunakan adalah $m = 0,1$; $u = 0,55$; $w = 0,65$; $\rho_1 = 0,2$; $c_1 = 0,08$; $c_2 = 0,05$; $\alpha = 1,41$; $\beta = 1,5$; $e_1 = 0,8$; $e_2 = 0,79$; $h_1 = 0,005$; $h_2 = 0,004$; $q = 0,25$; $\mu = 0,5$; $\theta = 0,2$; $\gamma = 0,2$; dan diambil nilai awalnya sebagai berikut.
 $x(0) = 0,25$; $i(0) = 0,25$;
 $y(0) = 0,2$; $z(0) = 0,2$;

Dengan bergantung pada nilai parameter e_1 dan e_2 yang berbeda, hal ini dapat ditunjukkan secara numerik eksistensi dan kepunahan dari salah satu predator pada solusi nonperiodik (siklus kehidupan tidak akan berhenti). Parameter e_1 dan e_2 merupakan parameter yang sangat penting karena termuat dalam fungsi respon dan respon numerik yang membentuk komponen utama dari model predator-prey. Permainan respon fungsi merupakan peranan penting dalam interaksi di antara prey dan predator. Ukuran parameter e_1 dan e_2 menyatakan efisiensi perubahan konsumsi prey terhadap kelahiran predator pertama dan kedua.

Beberapa parameter lain yang ditetapkan adalah sebagai berikut.

$$\alpha = 1,41; \beta = 1,5; u = 0,55;$$

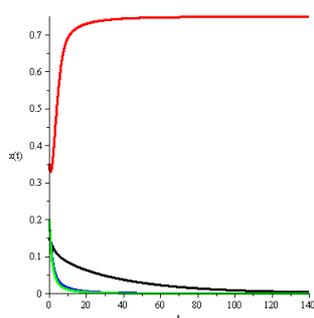
$$h_1 = 0,005; h_2 = 0,004; c_1 = 0,08;$$

$$c_2 = 0,05; w = 0,65; x(0) = 0,25;$$

$$i(t) = 0,25 \quad y(0) = 0,2; z(0) = 0,2.$$

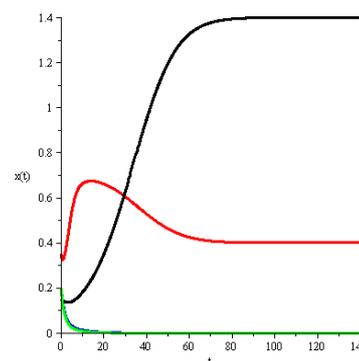
Beberapa simulasi numerik yang berbeda yang dilakukan, yaitu

1. Jika tingkat kematian alami prey $m=0,6$, Akibatnya hanya prey yang akan tetap bertahan hidup, sedangkan predator dan prey terinfeksi akan punah seperti ditunjukkan pada Gambar 1 berikut ini.



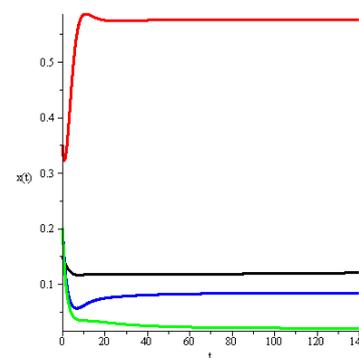
Gambar 1. Potret Fase Sistem (8) untuk $m=0,6$

2. Jika $e_1 = 0,45$ dan $e_2 = 0,45$ dan parameter lain seperti yang telah ditetapkan, akibatnya hanya prey yang akan tetap bertahan hidup, sedangkan predator akan punah seperti ditunjukkan pada Gambar 2 berikut ini.



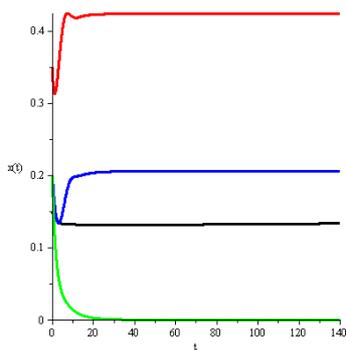
Gambar 2. Potret Fase Sistem (8) untuk $e_1 = 0,45$ dan $e_2 = 0,45$

3. Nilai e_2 ditetapkan 0,79, sedangkan nilai e_1 diubah-ubah untuk menunjukkan dampak dari efisiensi perubahan prey terhadap kelahiran predator pada keeksistensian dan kepunahan dari salah satu predator.
 - a. Jika $e_1 = 0,8$ dan parameter lain seperti yang telah ditetapkan, akibatnya keeksistensian ketiga spesies seperti ditunjukkan pada Gambar 3 berikut ini.



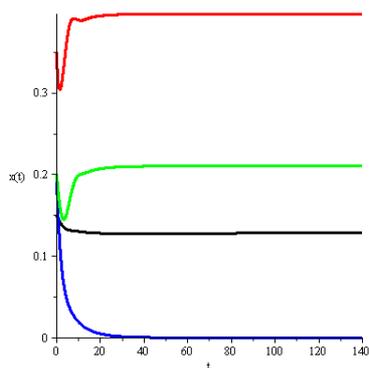
Gambar 3. Potret Fase Sistem (8) untuk $e_1 = 0,8$ dan $e_2 = 0,79$

- b. Jika e_1 dinaikkan menjadi $e_1 = 1,8$ dan parameter lain seperti yang telah ditetapkan, akibatnya predator kedua z mendekati punah seperti ditunjukkan pada Gambar 4 berikut ini.



Gambar 4. Potret Fase Sistem (8) untuk $e_1 = 1,8$ dan $e_2 = 0,79$

- c. Jika e_1 diturunkan menjadi $e_1 = 0,45$ dan parameter lain seperti yang telah ditetapkan, akibatnya *predator* pertama y mendekati punah seperti ditunjukkan pada Gambar 5 berikut ini.



Gambar 5. Potret Fase Sistem (8) untuk $e_1 = 0,45$ dan $e_2 = 0,79$

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa dalam penelitian ini diberikan model *predator-prey* dengan dua *predator* dan satu *prey* terinfeksi, dengan respon pemangsaannya menggunakan fungsi respon Holling tipe II dan laju pertumbuhan *prey* dan *predator* memenuhi fungsi logistik. Sistem (8) memiliki delapan titik ekuilibrium. Kestabilan titik ekuilibrium Sistem (8) dianalisis dengan kestabilan lokal dengan sifat stabil asimtotik.

Pada simulasi ini, ketiga populasi akan tetap bertahan hidup ketika nilai dari tingkat efisiensi perubahan konsumsi *prey* terhadap kelahiran *predator* pertama dan kedua saling berdekatan.

DAFTAR PUSTAKA

Alebraheem, J & Abu-Hasan, Y. (2012). Persistence of *predators* in a two *predators*-one *prey* model with non periodic solution. *Applied Mathematical Sciences*, 6(19), 943 – 956.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2008). *Elementary Differential Quations (Sixth Edition)*. New York: Pearson Education, Inc.

Kar,T.K., Ghorai. A., & Jana, S.W. (2012). Dynamics of pest and its predator model with disease in the pest and optimal use of pesticide, fever epidemic through the use. *American Journal of Theoretical Biology*, 310: 187-198.