Indonesian Journal of Mathematics Education
Vol. 1, No 1, Oktober 2018, pp: 26~33
p-ISSN: 2654-3907 , e-ISSN: 2654-346X ,
e-mail: ijome@untidar.ac.id, website: jurnal.untidar.ac.id/index.php/ijome

Persamaan Parametrik Jejak Spirograf Persegi dengan *Geogebra*

Prihadi Kurniawan
IKIP Veteran Jawa Tengah, Semarang, 085642615299
e-mail: kurniawan.prihadi@gmail.com

Abstrak

Spirograf adalah mainan yang dapat digunakan untuk menggambar pola yang indah dengan memutar lingkaran kecil dengan gerigi di bagian luarnya, yang disebut roda, di dalam lingkaran yang lebih besar dengan gerigi di bagian dalamnya, yang disebut cincin. Spirograf yang orisinil terdiri dari roda dan cincin dalam berbagai ukuran. Setelah roda berputar di dalam cincin, akan dihasilkan suatu kurva matematika berpola yang luar biasa. Setiap kali roda atau cincin diubah, itu akan menghasilkan kurva yang berbeda. Kurva-kurva tersebut dapat ditentukan oleh persamaan parametrik yang spesifik. Artikel ini membahas tentang persamaan parametrik spirograf ketika lingkaran cincin diubah menjadi cincin persegi. *Geogebra* digunakan untuk menggambarkan kurva spirografnya. Ide pembentukan persamaan parametrik spirograf ini membantu siswa untuk memahami topik tentang persamaan parametrik dalam mata kuliah kalkulus dan untuk menunjukkan bagaimana *geogebra* bekerja.

Kata Kunci: *geogebra*, persamaan parametrik, spirograf

The Parametric Equation of Square Spirograph Trace with Geogebra

Abstract

Spirograph is a toy that can be used to draw beautiful patterns by spinning the small circle with outer gear teeth, called wheels, inside the bigger one with inner gear teeth, named rings. The original spirograph consists of wheels and rings in wide range of sizes. Once a wheel spins inside the ring, it produces incredible mathematical roulette curves. Every time the wheel or ring were changed, it would produce different curves. Those curves can be determined by specific parametric function. This article discusses about spirograph parametric equation when the circle rings were changed into square rings. Geogebra was used to draw the patterns. The idea of forming the parametric function helps students to understand this topic in calculus courses and to show how geogebra works.

Keywords*: geogebra, parametic equation, spirograph*

PENDAHULUAN

Perkembangan teknologi saat ini memungkinkan adanya banyak alat bantu untuk mengonstruksi objek-objek matematika. Banyak aplikasi perangkat lunak yang dirancang khusus untuk memudahkan pembelajaran matematika, satu di antara beberapa aplikasi yang digunakan adalah *geogebra* (Buteau, *et al*., 2010). *Geogebra* adalah perangkat lunak yang tersedia secara bebas untuk pembelajaran dan pengajaran matematika yang mendukung fitur-fitur geometri, aljabar, dan kalkulus yang terintegrasi dalam satu perangkat lunak yang mudah digunakan (Hohenwarter, *et al*., 2008). Saat ini, *geogebra* menjadi penyedia perangkat lunak matematika terkemuka yang mendukung kemajuan pendidikan sains, teknologi, teknik, dan matematika. Selain itu, *geogebra* mampu memvisualisasikan konsep matematika yang bersifat analitik secara geometris (Sur, 2017). *Geogebra* juga dapat dimanfaatkan sebagai media pembelajaran matematika untuk mendemonstrasikan atau memvisualisasikan

Diterima: 14 September 2018; Disetujui: 26 Oktober 2018; Dipublikasikan: 31 Oktober 2018

konsep-konsep matematis serta sebagai alat bantu untuk mengonstruksi konsep-konsep matematis (Mahmudi, 2011).

Geogebra dalam peranannya sebagai alat bantu penggambaran grafik fungsi, tidak luput dalam mengembangkan fasilitas dalam menggambarkan kurva suatu persamaan parametrik. Persamaan parametrik ini menjadi kurva yang sulit digambarkan secara manual namun memiliki peranan yang luar biasa dalam konstruksi kurva-kurva periodik.

Beberapa permainan melibatkan konsep matematika di dalamnya. Satu contoh adalah spirograf. Permainan ini sering digunakan untuk menghasilkan pola-pola kurva yang indah untuk dekorasi. Dalam versi standarnya, spirograf terdiri dari lingkaran-lingkaran bergerigi yang diputarkan dalam lingkaran lain yang lebih besar. Bersamaan dengan pergerakan ini, sebuah pena disematkan dalam lubang-lubang di lingkaran yang lebih kecil dan dibiarkan ikut bergerak. Dengan cara ini, suatu kurva lengkung yang berulang akan terbentuk. Jejak pena ini telah dimodelkan secara matematis oleh Köller (1999). Köller menentukan suatu persamaan parametrik dari jejak spirograf yang bergantung pada jari-jari lingkaran besar dan kecil, serta jarak titik pada lingkaran kecil dengan titik pusatnya. Untuk pemilihan ukuran yang berbeda akan terbentuk kurva yang berbeda pula.

Dalam kajian ini, akan ditentukan persamaan parametrik dari jejak spirograf dengan mengganti lingkaran yang besar menjadi sebuah persegi. Kajian ini dapat digunakan sebagai materi pengajaran kalkulus tentang persamaan parametrik yang berkaitan dengan pemodelan matematika dari benda konkret.

Buteau, *et al.* (2010) dalam studi literaturnya menjelaskan bahwa kalkulus menjadi topik yang paling sering dipilih dalam kaitannya dengan penggunaan aplikasi matematika berbasis komputer pada pengajaran. Salah satu alasannya adalah karena dengan menggunakan aplikasi matematika, para pembelajar dapat memulai menganalisis beberapa kurva dengan sangat baik dan cepat dibandingkan apabila menggambarkannya secara manual. Karena itulah dalam kajian ini digunakan aplikasi *geogebra* untuk mengonstruksi kurva yang dimaksud. Harapannya para pengajar yang menggunakan kajian ini sebagai sumber pengajaran, dapat menyimulasikan hal yang sama saat pembelajaran.

DASAR TEORI

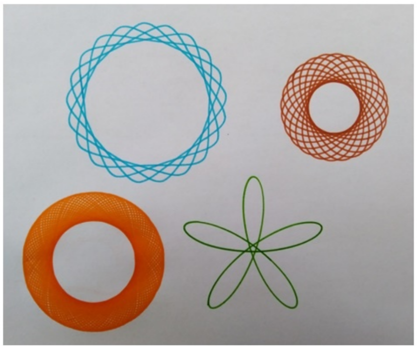
Spirograf

Spirograf adalah sebuah permainan matematika sederhana. Permainan ini dikembangkan oleh seorang insinyur Inggris bernama Denys Fisher pada 1965. Spirograf digunakan untuk menggambar suatu pola matematika berbentuk kurva yang sangat indah.

Spirograf standar terdiri atas dua komponen utama. Pertama disebut ***cincin***, yakni lubang berbentuk lingkaran yang bergerigi di bagian dalamnya. Kedua disebut ***roda***, yakni kepingan berbentuk lingkaran yang bergerigi di bagian luarnya. Pada roda ini terdapat lubang-lubang kecil untuk menempatkan alat tulis yang digunakan untuk menggambarkan jejak spirografnya ketika roda diputar. Ukuran cincin dan roda ini ada beberapa macam yang dapat dipilih sesuai dengan ukuran dan bentuk jejak spirograf yang ingin digambar.

Untuk mendapatkan pola jejak spirograf, alat tulis ditempatkan di salah satu lubang pada roda kemudian roda diputar sedemikian sehingga gerigi-gerigi antara roda dan cincin berhimpit. Alat tulis ikut digulirkan tanpa mengubah posisi lubangnya. Melalui cara ini, suatu kurva lengkung matematis akan terbentuk. Untuk pemilihan cincin dan roda yang berbeda, kurva yang terbentuk juga berbeda (Gambar 2).

Gambar 1. Satu Set Spirograf
(Sumber: Dokumen Pribadi)



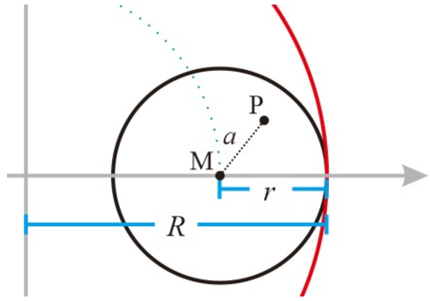
Gambar 2. Jejak Spirograf Lingkaran dengan Pilihan Roda dan Cincin yang Berbeda
(Sumber: Dokumen Pribadi)

Persamaan Parametrik Spirograf

Biasanya suatu kurva ditentukan oleh sebuah persamaan yang menentukan hubungan antara absis (koordinat x) dengan ordinatnya (koordinat y), misalnya persamaan eksplisit seperti $y = 2x$, atau persamaan implisit seperti $x^2 + y^2 = 1$. Apabila absis dan ordinat titik-titik pada suatu kurva ditentukan oleh suatu fungsi atas variabel yang lain, misal t, dengan

$$x = x(t) \text{ dan } y = y(t),$$

persamaan seperti ini disebut persamaan parametrik dan t disebut parameter (Hockett & Bock, 2010). Setiap nilai t menentukan suatu titik (x, y) pada kurva. Dengan berubahnya nilai t, titik $(x, y) = (x(t), y(t))$ bergerak sepanjang kurva yang disebut kurva parametrik.



Gambar 3. Model Spirograf Lingkaran

Köller (1999) telah mengonstruksi persamaan parametrik yang merepresentasikan kurva jejak spirograf lingkaran yang pemodelannya digambarkan pada Gambar 3. Persamaan parametriknya ditentukan oleh

$$x(t) = (R - r)\cos\left(\frac{rt}{R}\right) + a\cos\left(\left(1 - \frac{r}{R}\right)t\right)$$

$$y(t) = (R - r)\sin\left(\frac{rt}{R}\right) - a\sin\left(\left(1 - \frac{r}{R}\right)t\right)$$

dengan t adalah sudut antara sumbu-X positif dengan garis yang menghubungkan titik pusat cincin dan roda spirograf. Formula trigonometri ini menjamin adanya pergerakan yang periodik. Kurva yang terbentuk dari berputarnya roda ini akan membentuk kurva yang berulang.

Fungsi Parametrik Persegi

Menurut persamaan kurva Lame (dalam Krivoshapko & Ivanov, 2015), persamaan implisit yang menggambarkan persegi dengan titik-titik sudut $(s,0)$, $(0,s)$, $(-s,0)$, dan $(0,-s)$ dapat dinyatakan sebagai $|x| + |y| = s$ (Gambar 4). Persamaan implisit ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan parametrik

$$x(t) = s\cos(t).|\cos(t)|,$$

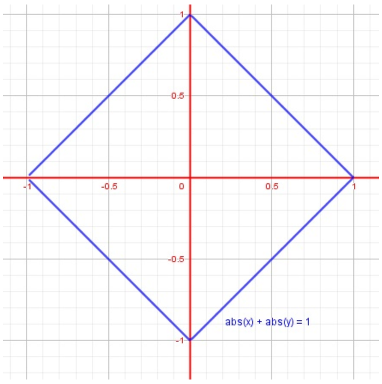
$$y(t) = s\sin(t).|\sin(t)|. \qquad (1)$$

Melalui rotasi dan beberapa penyesuaian pada Persamaan (1), dapat ditentukan persamaan parametrik persegi dengan panjang sisi $2A$ dan sepasang sisi yang sejajar sumbu-X. Persamaan parametriknya dapat ditentukan sebagai

$$x(t) = A\left(\cos(t).|\cos(t)| - \sin(t).|\sin(t)|\right),$$

$$y(t) = A\left(\cos(t).|\cos(t)| + \sin(t).|\sin(t)|\right) \quad (2)$$

(Weisstein, 2010).

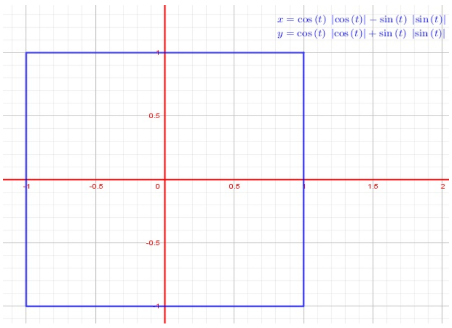


Gambar 4. Kurva $|x|+|y|=s$ untuk $s=1$.

Selain itu, persamaan implisit

$$|x-y|+|x+y|=2A$$

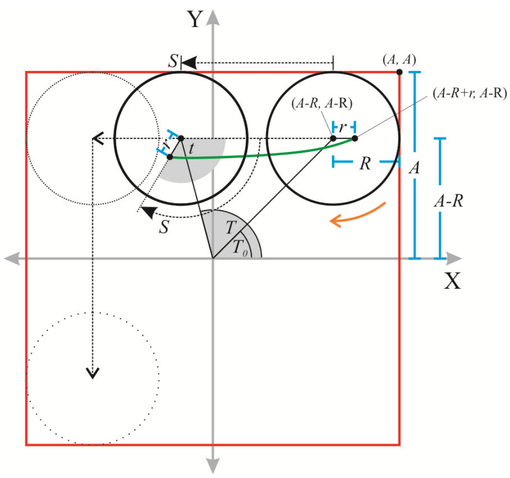
juga dapat digunakan untuk merepresentasikan persegi yang sama.



Gambar 5. Kurva Persamaan (2) dengan $A=1$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Fungsi Parametrik Spirograf Persegi



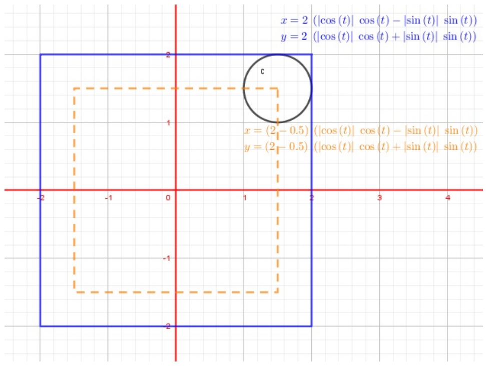
Gambar 6. Model Spirograf Persegi

Misalkan dipunyai persegi dengan panjang sisi $2A$ dengan persamaan parametrik

$$x(t)=A\left(|\cos t|\cos t-|\sin t|\sin t\right),$$
$$y(t)=A\left(|\cos t|\cos t+|\sin t|\sin t\right). \qquad (3)$$

Persegi ini dimisalkan sebagai cincin dari spirograf. Di dalam persegi ini, terdapat lingkaran, anggap berjari-jari *R*, sebagai roda spirograf. Mula-mula roda ini ditempatkan di kanan atas persegi. Roda ini diputar berlawanan arah jarum jam sehingga sisi-sisi persegi dan sisi luar roda selalu berhimpit (diasumsikan tidak licin). Dapat diperhatikan bahwa jejak titik pusat roda dapat ditentukan oleh persamaan parametrik

$$x_p=x(t)=(A-R)\left(|\cos t|\cos t-|\sin t|\sin t\right),$$
$$y_p=y(t)=(A-R)\left(|\cos t|\cos t+|\sin t|\sin t\right). \quad (4)$$

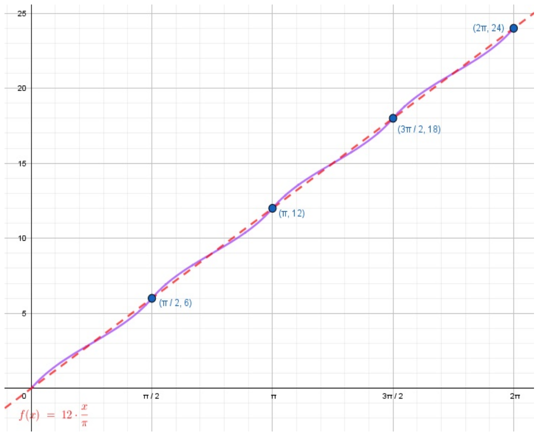


Gambar 7. Jejak Titik Pusat Roda Persamaan (4) dengan Nilai $A=2$ dan $R=0{,}5$.

Jejak spirograf akan ditentukan oleh sebuah titik pada roda di dalam cincin persegi. Misalkan titik dalam roda ini berjarak *r* dari titik pusat roda. Saat $t=0$ koordinat titik ini adalah $(A-R+r, A-R)$. Saat roda diputar (nilai *t* bertambah dalam satuan radian) posisi titik ini akan berubah. Jejak dari titik ini akan disebut sebagai jejak spirograf yang persamaan parametriknya akan ditentukan.

Misalkan *S* adalah jarak yang ditempuh titik pusat roda pada saat *t*. Jarak ini dapat ditentukan oleh fungsi berikut.

$$S(t)=\begin{cases} 2(A-R)\dfrac{|\sin t|}{|\sin t|+|\cos t|} & 0\le t\le \dfrac{\pi}{2} \\ 2(A-R)\left(1+\dfrac{|\cos t|}{|\sin t|+|\cos t|}\right) & \dfrac{\pi}{2}<t\le \pi \\ 2(A-R)\left(2+\dfrac{|\sin t|}{|\sin t|+|\cos t|}\right) & \pi<t\le \dfrac{3\pi}{2} \\ 2(A-R)\left(3+\dfrac{|\cos t|}{|\sin t|+|\cos t|}\right) & \dfrac{3\pi}{2}<t\le 2\pi \\ \ldots & \end{cases}$$



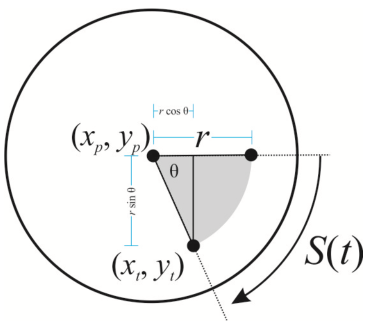
Gambar 8. Grafik $S(t)$ dengan Nilai $(A-R)=3$ dan Pendekatan Fungsi Linearnya

Fungsi $S(t)$ sulit didefinisikan dengan lebih sederhana. Oleh karena itu, fungsi $S(t)$ akan ditentukan melalui pendekatan fungsi linear yang melalui titik-titik kritisnya. Ditentukan $S(t) \approx \dfrac{4(A-R)}{\pi} t$.

Pada saat *t*, roda telah menempuh sejauh $S(t)$ dan titik pusat roda adalah (x_p, y_p) seperti pada Persamaan (4). Dari sini dapat diperoleh koordinat titik dalam roda pada saat *t*dapat ditentukan oleh persamaan

$$x_t = x_p + r \cdot \cos(\theta)$$
$$y_t = y_p - r \cdot \sin(\theta)$$

dengan nilai $\theta = \dfrac{S(t)}{r} = \dfrac{4t(A-R)}{\pi . R}$.



Gambar 9. Representasi Koordinat (x_t, y_t)

Jadi, diperoleh bahwa persamaan parametrik posisi titik pada roda ditentukan oleh

$$x_t = x(t) = (A-R)\left(\left|\cos t\right|\cos t - \left|\sin t\right|\sin t\right) + r \cdot \cos(\theta)$$
$$y_t = y(t) = (A-R)\left(\left|\cos t\right|\cos t + \left|\sin t\right|\sin t\right) - r \cdot \sin(\theta)$$
$$\text{dengan } \theta = \frac{4t(A-R)}{\pi . R}. \qquad (5)$$

Kurva dari persamaan parametrik ini merupakan jejak spirograf yang terbentuk oleh roda dan cincin persegi. Dapat diperhatikan bahwa terdapat tiga variabel yang digunakan untuk mendefinisikan jejak spirograf ini, yakni *A*, *R*, dan *r* yang berturut-turut merupakan setengah ukuran sisi cincin persegi, jari-jari roda, dan jarak titik pada roda dengan titik pusat roda.

Berikutnya akan ditentukan nilai-nilai *A*, *R*, dan *r* sehingga persamaan parametrik ini mendefinisikan kurva yang periodik. Tanpa mengurangi keumuman akan ditentukan nilai-nilai *A* dan *R* sehingga terdapat nilai *t* yang memenuhi

$$x_p(0) = x_p(t),\ y_p(0) = y_p(t), \qquad (6)$$
$$x_t(0) = x_t(t),\ \text{dan } y_t(0) = y_t(t). \qquad (7)$$

Solusi dari Sistem Persamaan (6) adalah nilai-nilai *t* yang memenuhi $\left|\cos t\right|\cos t = 1$, yakni

$$t = n.2\pi,\ n = 0,1,2,\ldots. \qquad (8)$$

Sedangkan, Sistem Persamaan (7) terpenuhi apabila

$$\cos\left(\frac{4t(A-R)}{\pi . R}\right) = 1 \text{ dan } \sin\left(\frac{4t(A-R)}{\pi . R}\right) = 0.$$

sehingga diperoleh

$$\frac{4t(A-R)}{\pi . R} = m.2\pi,\ m = 0,1,2,\ldots$$

yang ekuivalen dengan

$$t = \frac{2mR\pi^2}{4(A-R)},\ m = 0,1,2,\ldots.$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (8) diperoleh

$$n.2\pi = \frac{2mR\pi^2}{4(A-R)},\ n,m = 0,1,2,\ldots$$

sehingga didapat

$$\frac{n}{m} = \frac{R\pi}{4(A-R)},\ n,m = 0,1,2,\ldots. \qquad (9)$$

Persamaan (9) hanya dipenuhi untuk nilai-nilai $(A-R) = q.\pi$ untuk suatu bilangan rasional *q*. Jadi, diperoleh bahwa kurva Persamaan Parametrik (5) akan menjadi suatu kurva periodik apabila $A = q.\pi + R$ untuk suatu bilangan rasional *q*. Lebih lanjut, bilangan bulat *n* menyatakan banyaknya roda berputar kembali ke posisi asalnya.

Pemanfaatan *Geogebra* untuk Menggambarkan Kurva Persamaan Parametrik Spirograf Persegi

Variabel yang digunakan dalam kurva ini adalah *q*, *R*, dan *r*, serta sebuah parameter *T*. Keempat peubah tersebut kemudian inputkan ke dalam *geogebra* dengan cara menuliskan *q*, *R*, *r*, dan *T* pada kolom input. Saat menginputkan peubah-peubah ini pertama kali, *geogebra* langsung memberikan pilihan untuk membuat *slider* untuk masing-masing peubah. *Slider* ini bermanfaat untuk menyatakan nilai masing-masing peubah secara langsung dengan cara menggeser tuas pada *slider* sesuai dengan nilai yang dikehendaki. Selanjutnya, ditentukan nilai *A* dengan menginputkan A=pi*q+R pada kolom input.

Selanjutnya persamaan implisit cincin persegi spirograf diinputkan dengan perintah

```
abs(x-y) + abs(x+y) = 2 A
```

dan persamaan parametrik jejak spirograf ditentukan oleh perintah berikut.

```
Curve((A - R) (abs(cos(t)) cos(t)
- abs(sin(t)) sin(t)) + r cos((4t
(A - R)) / (R π)), (A - R)
(abs(cos(t)) cos(t) + abs(sin(t))
sin(t)) - r sin((4t (A - R)) / (R
π)), t, 0, T)
```

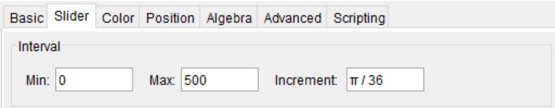
Dapat ditambahkan pula persamaan lingkaran roda spirograf dan titik dalam roda dengan menginputkan perintah berikut.

```
(x - (A - R) (abs(cos(T)) cos(T) -
abs(sin(T)) sin(T)))² + (y - (A -
R) (abs(cos(T)) cos(T) +
abs(sin(T)) sin(T)))² = R²

((A - R) (abs(cos(T)) cos(T) -
abs(sin(T)) sin(T)) + r cos((4T (A
- R)) / (R π)), (A - R)
(abs(cos(T)) cos(T) + abs(sin(T))
sin(T)) - r sin((4T (A - R)) / (R
π)))

((A - R) (abs(cos(T)) cos(T) -
abs(sin(T)) sin(T)), (A - R)
(abs(cos(T)) cos(T) + abs(sin(T))
sin(T)))
```

Terakhir, masing-masing *slider* dapat disesuaikan pada menu *Object Properties* sebagai berikut.

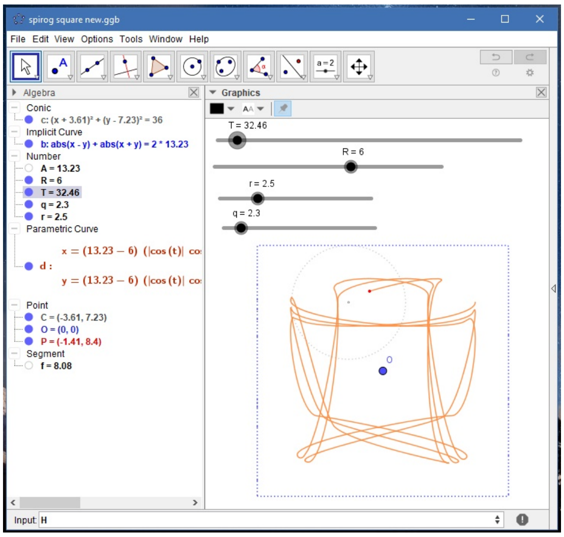


Gambar 10. *Tab Slider Preferences* pada *Object Properties*

Tabel 1. Tabel *Slider Preferences*

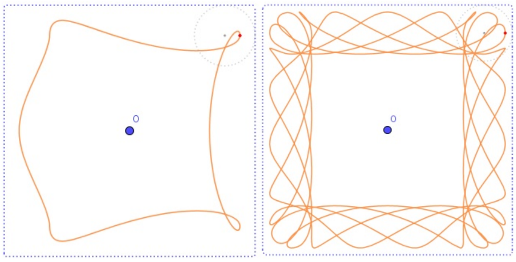
Peubah	Min	Max	Increment
q	0	20	0,5
r	0	10	0,1
R	0	10	0,1
T	0	500	$\pi/36$

Setelah nilai *q*, *r*, dan *R* disesuaikan, jejak spirograf dapat diamati dengan cara menggeser tuas *slider* nilai *T*. Dengan menggesernya sedikit demi sedikit, pergerakan roda di dalam cincin persegi dapat diamati, begitu pula dengan jejak spirografnya.

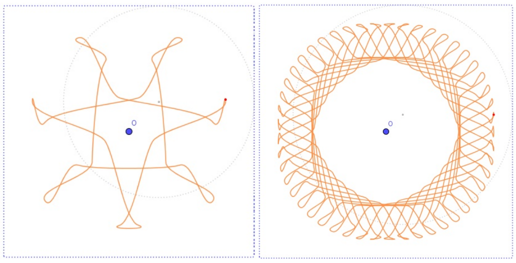


Gambar 11. Tampilan Jejak Spirograf dengan *Geogebra*

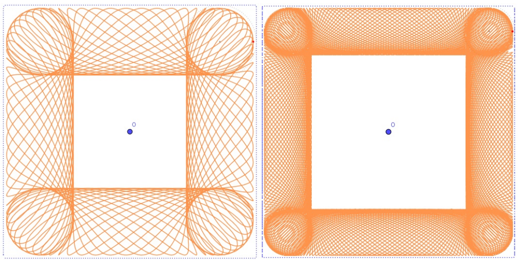
Berikut adalah beberapa jejak spirograf dengan beragam nilai *q*, *r*, dan *R*.



Gambar 12. Spirograf $q = 2; r = 1; R = 2$ dan $q = 2{,}2; r = 1{,}5; R = 2$.



Gambar 13. Spirograf $q = 0{,}1; r = 0{,}7; R = 1$ dan $q = 0{,}2; r = 3{,}4; R = 4{,}1$.



Gambar 14. Spirograf $q = 3{,}6; r = 4{,}2; R = 4{,}6$ dan $q = 6{,}2; r = 3{,}4; R = 4{,}9$.

SIMPULAN DAN SARAN

Persamaan parametrik kurva yang dibentuk oleh spirograf persegi dapat ditentukan oleh

$$x_t = x(t) = (A - R)\left(|\cos t|\cos t - |\sin t|\sin t\right) + r \cdot \cos(\theta)$$
$$y_t = y(t) = (A - R)\left(|\cos t|\cos t + |\sin t|\sin t\right) - r \cdot \sin(\theta)$$

dengan $\theta = \dfrac{4t(A - R)}{\pi . R}$.

Terdapat beberapa keterbatasan dalam konstruksi persamaan parametrik spirograf persegi ini. Pertama, fungsi jarak yang ditempuh oleh titik pusat roda pada saat t belum dapat ditentukan secara tepat. Fungsi linear yang digunakan untuk pendekatannya menyebabkan adanya sedikit pergeseran jejak kurva spirograf sebenarnya.

Kedua, pada versi spirograf standar dengan cincin berbentuk lingkaran, persamaan parametriknya menjamin adanya pergerakan yang periodik, namun tidak dengan kurva persamaan parametrik spirograf persegi. Persamaan parametrik spirograf persegi akan menjadi suatu kurva periodik apabila ditentukan $A = q.\pi + R$ untuk suatu bilangan rasional q. Dengan kata lain, ukuran sisi cincin persegi bergantung pada jari-jari roda. Meskipun demikian, kurva jejak spirograf persegi dapat dengan mudah digambarkan dengan menggunakan *geogebra*. Pola-pola kurva yang berbeda hanya cukup ditentukan dengan menggeser *slide* pada variabel yang diinginkan.

DAFTAR PUSTAKA

Buteau, C., Marshall, N., Jarvis, D., & Lavicza, Z. (2010). Integrating Computer Algebra Systems in Post-Secondary Mathematics Education: Preliminary Results of a Literature Review. *International for Technology in Math Journal ematics Education*, 17(2), 57-68.

Hockett, S.O. & Bock, D. (2010). *Baroon's AP Calculus 10th Edition.* New York: Barron's Educational Series, Inc.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis Y. & Lavicza, Z. (2008). Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra. *International Congress on Mathematical Education (ICME) Proceeding*. Mexico: International Mathematical Union.

Köller, J. (1999). *Spirograph*. Diambil dari http://www.mathematische-basteleien.de/spirographs.htm

Krivoshapko, S. N. & Ivanov, V. N. (2015). *Encyclopedia of Analitical Surfaces*. New York: Springer.

Mahmudi, A. (2011). Pemanfaatan Geogebra dalam Pembelajaran Matematika. *Seminar Nasional LPM UNY 2011*, Yogyakarta.

Sur, W. A. A. (2017). Konstruksi Materi Konsep Integral Tentu dengan Sofware Geogebra. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika 2017*, Malang.

Weisstein, E. W. (2010).*Superellipse*. Diambil dari MathWorld-A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Superellipse.html